РАССМОТРЕНО	СОГЛАСОВАНО	УТВЕРЖДАЮ
на заседании МО руководитель ШМО	зам. директора по НМР	директор МБОУ Лицей № 1
________________	________________	________________
Парчайкина Л.А. протокол № 1 от «31» августа 2018 г.	Львова Л.В. «31» августа 2018 г.	Тютерев В.А. № приказа _1_ от «31» августа 2018 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по учебному предмету

«Решение уравнений и неравенств с параметрами», 10 класс

(предмет, класс)

Разработчик:
Парчайкина Любовь Александровна,
учитель математики
МБОУ Лицей №1
высшей квалификационной категории

2018-2019 учебный год

Введение

Изучение многих физических процессов и геометрических закономерностей часто приводит к решению задач с параметрами. Наиболее трудной и важной частью решения таких задач является исследование процесса в зависимости от параметров.

Задачи с параметрами включены в содержание ЕГЭ по математике и очень часто оказываются не по силам обучающимся. Это, вообще говоря, неудивительно, поскольку у большинства учащихся нет должной свободы в, общении с параметрами.

Появление таких задач на экзамене далеко не случайно, так как с их помощью проверяется техника владения формулами элементарной математики, методами решения уравнений и неравенств, умение выстраивать логическую цепочку рассуждений (без чего решение задач с параметрами невозможно) и уровень логического мышления учащихся.

Необходимость введения элективного курса «Решение уравнений и неравенств с параметрами» обусловлена тем, что практика вступительных экзаменов далеко оторвалась от школы и достаточно велика разница между требованиями, которые предъявляет к своему выпускнику школа, и требованиями, которые предъявляет к своему поступающему вуз, особенно вуз высокого уровня. В процессе решения задач с параметрами приобретаются определенные умения исследовательской работы.

Цель курса – научить учащихся методам решения задач с параметрами, помочь преодолеть психологический барьер, который обусловлен противоречивыми характеристиками параметра. С одной стороны, параметр в уравнении следует считать величиной известной, а с другой - конкретное значение параметра неизвестно. С одной стороны, параметр является величиной постоянной, а с другой – может принимать различные значения. Получается, что параметр - неизвестная известная, переменная постоянная величина.

Пояснительная записка

В связи с переходом на профильное обучение возникла необходимость в обеспечении углубленного изучения математики и подготовки учащихся к продолжению образования.

Предлагаемый элективный курс «Решение уравнений и неравенств с параметрами» составлен на основе авторской программы Д.Ф.Айвазяна с одноименным названием и является предметно-ориентированным и предназначен на два года обучения для реализации в 10-11 классах общеобразовательной школы для расширения теоретических и практический знаний учащихся. Решение уравнений, содержащих параметры, – один из труднейших разделов школьного курса. Запланированный данной программой для усвоения учащимися объем знаний необходим для овладения ими методами решения некоторых классов заданий с параметрами, для обобщения теоретических знаний. В процессе решения задач с параметрами приобретаются определенные умения исследовательской работы. Трудности при решении задач с параметрами обусловлены тем, что наличие параметра заставляет решать задачу не по шаблону, а рассматривать различные случаи, при каждом из которых методы решения существенно отличаются друг от друга. Так же необходимо хорошо знать свойства функций и выделять те, которые нужно применять в конкретном случае.

Программа рассчитана на 34 часа (по 1 часу в неделю).

Срок реализации рабочей учебной программы — один учебный год.

Целью данного курса является изучение избранных классов уравнений с параметрами и научное обоснование методов их решения, а также формирование логического мышления и математической культуры у школьников.

Курс имеет общеобразовательное значение, способствует развитию логического мышления учащихся. Программа данного элективного курса ориентирована на приобретение определенного опыта решения задач с параметрами. Курс входит в число дисциплин, включенных в компонент учебного плана образовательного учреждения. Изучение данного курса тесно связано с такими дисциплинами, как алгебра, алгебра и начала анализа, геометрия.

В результате курса учащиеся должны научиться применять теоретические знания при решении уравнений и неравенств с параметрами, знать некоторые методы решения заданий с параметрами (по определению, по свойствам функций, графически и т. д.)

Данный курс представляется особенно актуальным и современным, так как расширяет и систематизирует знания учащихся, готовит их к более осмысленному пониманию теоретических сведений.

Данный курс имеет существенное образовательное значение для изучения алгебры.

Задачи курса:

- овладение системой знаний об уравнениях с параметром как о семействе уравнений, что исключительно важно для целостного осмысления свойств уравнений и неравенств, их особенностей;
- овладение аналитическим и графическими способами решения задач с параметром;
- приобретение исследовательских навыков в решении задач с параметрами;
- формированию логического мышления учащихся;
- вооружению учащихся специальными и общеучебными знаниями, позволяющими им самостоятельно добывать знания по данному курсу;
- подготовка учащихся к сдаче ЕГЭ и поступлению в ВУЗы.

Содержание курса предполагает работу с различными источниками математической литературы. Содержание каждой темы элективного курса включает в себя самостоятельную работу учащихся.

Данный курс рассчитан на 40 часов (по 20 часов в 10 и 11 классах) и содержит следующие основные разделы:

Введение. Понятие уравнений с параметрами. Первое знакомство с уравнениями, содержащими параметр.

1. Линейные уравнения, неравенства и их системы.
2. Квадратные уравнения и неравенства.
3. Аналитические и геометрические приемы решения задач с параметрами.
4. Решение различных видов уравнений и неравенств с параметрами.

Задачи программы:

- познакомиться с понятиями «параметр», «уравнение с параметром», «неравенство с параметром», «система уравнений с параметром», «система неравенств с параметром».
- различать условия параметрических задач;
- научиться решать уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств с параметром аналитическим и графическим способами;
- научиться математически грамотно оформлять решение задач с параметром.

Ожидаемые результаты

Учащийся *должен знать*:

- понятие параметра;
- что значит решить уравнение с параметром, неравенство с параметром, систему уравнений и неравенств с параметром;
- основные способы решения различных уравнений, неравенств и систем уравнений и неравенств с параметром (линейных и квадратных);
- алгоритмы решений задач с параметрами;
- зависимость количества решений неравенств, уравнений и их систем от значений параметра свойства решений уравнений, неравенств и их систем;
- свойства функций в задачах с параметрами.

Учащийся *должен уметь*:

- определять вид уравнения (неравенства) с параметром;
- выполнять равносильные преобразования;
- применять аналитический или функционально-графический способы для решения задач с параметром;
- осуществлять выбор метода решения задачи и обосновывать его;
- использовать в решении задач с параметром свойства основных функций;
- выбирать и записывать ответ;
- решать линейные, квадратные уравнения и неравенства; несложные иррациональные, тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства с одним параметром при всех значениях параметра.

Учащийся *должен владеть:*

- анализом и самоконтролем;
- исследованием ситуаций, в которых результат принимает те или иные количественные или качественные формы.

Изучение данного курса *дает учащимся возможность:*

- повторить и систематизировать ранее изученный материал школьного курса математики;
- освоить основные приемы решения задач;
- овладеть навыками построения и анализа предполагаемого решения поставленной задачи;

- познакомиться и использовать на практике нестандартные методы решения задач;
- повысить уровень своей математической культуры, творческого развития, познавательной активности;
- познакомиться с возможностями использования электронных средств обучения, в том числе Интернет-ресурсов;
- усвоить основные приемы и методы решения уравнений, неравенств, систем уравнений с параметрами;
- применять алгоритм решения уравнений, неравенств, содержащих параметр;
- проводить полное обоснование при решении задач с параметрами;
- овладеть исследовательской деятельностью.

Формы работы: лекционно-семинарская, групповая и индивидуальная.

Методы работы: исследовательский и частично-поисковый.

Виды деятельности на занятиях: лекция, беседа, практикум, консультация, работа с компьютером.

При решении задач с параметрами одновременно активно реализуются основные методические принципы:

- *принцип параллельности* – следует постоянно держать в поле зрения несколько тем, постепенно продвигаясь по ним вперед и вглубь;
- *принцип вариативности* – рассматриваются различные приемы и методы решения с различных точек зрения: стандартность и оригинальность, объем вычислительной и исследовательской работы;
- *принцип самоконтроля* – невозможность подстроиться под ответ вынуждает делать регулярный и систематический анализ своих ошибок и неудач;
- *принцип регулярности* – увлеченные математикой дети с удовольствием дома индивидуально исследуют задачи, т. е. занятия математикой становятся регулярными, а не от случая к случаю на уроках.
- *принцип последовательного нарастания сложности.*

Содержание учебного материала

Введение. Понятие уравнений с параметрами. Первое знакомство с уравнениями с параметром.

Тема 1. Линейные уравнения, их системы и неравенства с параметром.

Линейные уравнения с параметром. Алгоритм решения линейных уравнений с параметром. Решение линейных уравнений с параметрами. Зависимость количества корней в зависимости от коэффициентов a и b. Решение уравнений с параметрами при наличии дополнительных условий к корням уравнения. Решение уравнений с параметрами, приводимых к линейным. Линейные неравенства с параметрами. Решение линейных неравенств с параметрами. Классификация систем линейных уравнений по количеству решений (неопределенные, однозначные, несовместные). Понятие системы с параметрами. Алгоритм решения систем линейных уравнений с параметрами. Параметр и количество решений системы линейных уравнений.

Тема 2. Квадратные уравнения и неравенства.

Понятие квадратного уравнения с параметром. Алгоритмическое предписание решения Квадратных уравнений с параметром. Решение квадратных уравнений с параметрами. Зависимость, количества корней уравнения от коэффициента a и дискриминанта. Решение с помощью графика. Применение теоремы Виета при решении квадратных уравнений с параметром. Решение квадратных уравнений с параметрами при наличии дополнительных условий к корням уравнения. Расположение корней квадратичной функции относительно заданной точки. Задачи, сводящиеся к исследованию расположения корней квадратичной функции. Решение квадратных уравнений с параметром первого типа («для каждого значения параметра найти все решения уравнения»). Решение квадратных уравнений второго типа («найти все значения параметра, при каждом из которых уравнение удовлетворяет заданным условиям»). Решение квадратных неравенств с параметром первого типа. Решение квадратных неравенств с параметром второго типа.

Тема 3. Аналитические и геометрические приемы решения задач с параметрами.

Использование графических иллюстраций в задачах с параметрами. Использование ограниченности функций, входящих в левую и правую части уравнений и неравенств. Использование симметрии аналитических выражений. Метод решения относительно параметра. Применение равносильных переходов при решении уравнений и неравенств с параметром.

Тема 4. Решение различных видов уравнений и неравенств с параметрами.

Решение тригонометрических уравнений, неравенств с параметром. Решение логарифмических уравнений, неравенств с параметром. Решение иррациональных уравнений, неравенств с параметром.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО СОДЕРЖАНИЮ И ПРОВЕДЕНИЮ ЗАНЯТИЙ

Введение. Понятие уравнений с параметрами. Первое знакомство с уравнениями с параметром.

Элективный курс целесообразно начать с вводного (организационного) занятия, где учитель знакомит учащихся с содержанием и структурой курса, объемом и видом самостоятельных работ, а также формой итоговой работы, которую они выполнят в конце изучения курса. На первом занятии рекомендуется предложить учащимся темы и обсудить их для выступлений на практических занятиях.

Во второй части вводного занятия рекомендуется перейти к раскрытию понятий уравнения с параметром как семейства уравнений, равносильности уравнений, понятия уравнения с параметром, рассмотреть примеры задач, приводящих к уравнению с параметром и решения некоторых уравнений с параметром.

Тема 1. Линейные уравнения, их системы и неравенства с параметром.

При изучении темы на уроке дается понятие линейных уравнений с параметром, рассматриваются три случая зависимости количества корней от значения коэффициентов a и b. Здесь же необходимо начать решение уравнений с параметрами при наличии дополнительных условий к корням уравнения.

На последующих уроках необходимо рассмотреть понятие линейных неравенств с параметрами, на практическом занятии необходимо повторить свойства линейных неравенств и использовать их при решении линейных неравенств с параметрами.

Ввести классификацию систем линейных уравнений по количеству решений (неопределенные, однозначные), дать понятие системы с параметрами и алгоритм решения систем линейных уравнений с параметрами.

Тема 2. Квадратные уравнения и неравенства.

Данная тема – самая главная и основная тема курса, именно здесь отводится больше часов для изучения, на уроках необходимо ввести понятие квадратного уравнения с параметром, обратив внимание на неравенство нулю коэффициента a, рассмотреть зависимость корней уравнения от коэффициента a и дискриминанта, записать алгоритм решения квадратных уравнений с параметром. На практическом занятии целесообразно рассмотреть решение квадратных уравнений с параметрами при наличии дополнительных условий к корням уравнения.

В содержании данной темы раскрываются теоретические сведения о нахождении корней квадратного трехчлена в зависимости от значений параметров. Учащиеся должны представлять, как может проходить график параболы в том или ином случае.

Тема 3. Аналитические и геометрические приемы и методы решения задач с параметрами.

На этих уроках нужно рассмотреть различные приемы и методы решения уравнений с параметрами. Учащиеся должны понимать, что красота и краткость решения зачастую зависят от выбора пути решения задания. Необходимо подчеркнуть, какие именно задачи удобнее всего решать графическим методом.

Тема 4. Решение различных видов уравнений и неравенств с параметрами.

Обобщение и систематизация знаний учащихся в ходе решения задач различного типа. Эти уроки предполагается проводить в виде практикумов.

Тематический план

№	Раздел	Количество часов
1	Введение	1
2	Линейные уравнения, их системы и неравенства с параметрами	12
3	Квадратные уравнения и неравенства.	11
4	Аналитические и геометрические приемы и методы решения задач с параметрами.	9
5	Решение различных видов уравнений и неравенств с параметрами.	1
Всего		**34**

Программно-методическое и дидактическое обеспечение преподавания математики.

<u>для учителя:</u>

1. Айвазян Д.Ф. Математика. 10 – 11 классы. Решение уравнений и неравенств с параметрами: элективный курс / авт.-сост. Д.Ф. Айвазян. – Волгоград: Учитель, 2009.
2. Амелькин В.В. Задачи с параметрами [Текст] / В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич. – М.: Асар, 1996.
3. Башмаков М.И., Братусь Т.А. и др. Алгебра и начала анализа 10-11. Дидактические материалы. М.: Дрофа, 2003.
4. Беляев С.А. Задачи с параметрами: методическая разработка для учащихся Заочной школы «Юный математик» при ВЗМШ и МЦНМО. – М.: МЦНМО, 2009.
5. Васильева В. Уравнения и системы уравнений с параметром: применение понятия «пучок прямых на плоскости» [Текст] / В. Васильева, С. Забелина // Математика. – 2002. №4. - с. 20-22.
6. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2005.
7. Дорофеев В.Ю. Пособие по математике для поступающих в СПбГУЭФ. – СПб: Изд-во СПбГУЭФ, 2003.
8. Дорофеев Г.В. Решение задач, содержащих параметры. Ч. 2 [Текст] / Г. В. Дорофеев, В. В. Затакавай. – М.: Перспектива, 1990.-с. 2-38.
9. Дубич С. Линейные и квадратные уравнения с параметрами [Текст]: 9 класс / С. Дубич // Математика. – 2001. №36. -с. 28-31.
10. Егерман Е. Задачи с параметрами. 7-11 классы [Текст] / Е. Егерман // Математика. – 2003. №1 -с. 18-20.
11. Егерман Е. Задачи с параметрами. 7-11 классы [Текст] / Е. Егерман // Математика. – 2003. №2. -с. 10-14.
12. Карасев В. Решение задач с параметрами [Текст] / В. Ка-расев, Г. Левшина, И. Данченков // Математика. – 2005. №4. -с. 38-44.
13. Косякова Т. Решение квадратных и дробно-рациональных уравнений, содержащих параметры [Текст] / Т. Косякова // Математика. – 2002. №22. -с. 15-18.
14. Косякова Т. Решение линейных уравнений и систем линейных уравнений, содержащих параметры [Текст] / Т. Косякова // Математика. – 2001. №38. -с. 5-9.
15. Крамор В. С. Примеры с параметрами и их решение [Текст]: пособие для поступающих в вузы / В.С. Крамор. - М.: АРКТИ, 2000.-с. 48.
16. Креславская О. Задачи с параметром в итоговом повторении [Текст] / О. Креславская // Математика. – 2004. №18. -с. 23-27.
17. Креславская О. Задачи с параметром в итоговом повторении [Текст] / О. Креславская // Математика. – 2004. №19. -с,23-27
18. Кривчикова Э. Тема «Уравнения и системы уравнений» в курсе алгебры 11 класса [Текст] / Э. Кривчикова // Математика. – 2004. №37.-с. 18-37.
19. Легошина С. Решение неравенств первой и второй степени с параметрами [Текст] / С. Легошина // Математика. – 2000. №6.-с. 15-17.
20. Малинин В. Уравнение с параметрами [Текст]: графический метод решения // Математика. – 2003. №29. -с. 12-15.
21. Мордкович А.Г. Решаем уравнения. – М.: Школа-Пресс, 1995.
22. Муравин Г.К. Уравнения, неравенства и их системы [Текст]: фрагмент учебника Г.К. Муравина О.В., Муравиной Г.К. // Математика. – 2003. №4. -с. 21-27.
23. Окунев А.А. Графическое решение уравнений с параметрами [Текст] / А. А.

Окунев. – М.: Школа-Пресс, 1986.
24. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: Справочник. – М.: Изд-во Факториал, 1997.
25. Письменский Д. Т. Математика для старшеклассников [Текст] / Д. Т. Письменский. – М.: Айрис, 1996.
26. Сканави М.И. Полный сборник задач для поступающих в ВУЗы. Группа повышенной сложности / Под редакцией М.И. Сканави. – М.: ООО «Издательство «Мир и образование»: Мн.: ООО «Харвест», 2006. – 624 с.: ил.
27. Ткачук В.В. Математика – абитуриенту. Том 1 [Текст] / В. В. Ткачук. - М.: МЦНМО ТЕИС, 1996.-415 с.
28. Цыганов Ш. Десять правил расположения корней квадратного трехчлена [Текст] / Ш. Цыганов // Математика. – 2002. №18.-с. 19-23.
29. Цыганов Ш. Квадратные трехчлены и параметры [Текст] / Ш. Цыганов // Математика. – 1999. №5. -с. 4-9.
30. Шабунин М.И., Уравнения и системы уравнений с параметрами / Математика в школе. – 2003. №7. -с. 10-14.
31. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач [Текст]: учебное пособие для 10 класса средней школы / И. Ф. Шарыгин. – М.: Просвещение, 1989. – 252 с.
32. Шахмейстер А.Х. Задачи с параметрами в ЕГЭ. – СПб.: «ЧеРо-на-Неве», 2004.

<u>для ученика:</u>

1. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2: задачник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А.Г. Мордкович и др.]; под ред. А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2007.
2. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1: учебник для общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2007.
3. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 2: задачник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А.Г. Мордкович и др.]; под ред. А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2007.
4. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1: учебник для общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2007.
5. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы [Текст]: задачник для общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.О. Денищева, Т.А. Корешкова, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчинская; под ред. А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2006.
6. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2006.

КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

по алгебре и начала анализа
предмет

Класс ____11 __

Учитель Парчайкина Любовь Александровна

Количество часов

Всего 34 часа.; в неделю 1 час.

Планирование составлено на основе сборника элективных курсов Д.Ф.Айвазян, Изд-во «Учитель», Волгоград – 2009 г

Учебно-тематическое планирование

№ п/п	Тема	Кол-во часов	Дата проведения	
			по плану	фактически
Введение (1 час)				
1.	Понятие «уравнения с параметрами»	1		
Линейные уравнения, их системы и неравенства с параметрами (12 часов)				
2.	Линейные уравнения с параметрами	1		
3.	Решение линейных уравнений с параметрами	1		
4.	Решение линейных уравнений с параметрами при наличии дополнительных условий к корням уравнений	1		
5.	Решение уравнений, приводимых к линейным	1		
6.	Решение уравнений			
7.	Системы линейных уравнений с параметрами	1		
8.	Решение систем линейных уравнений (с двумя переменными) с параметрами	1		
9.	Решение линейных уравнений и систем линейных уравнений, содержащих параметры	1		
10.	*Контрольная работа №1 по теме: «Линейные уравнения и системы линейных уравнений с параметрами»*	1		
11.	Решение линейных неравенств с параметрами	1		
12.	Решение линейных неравенств с параметрами с помощью графической интерпретации	1		
13.	Решение систем линейных неравенств с одной переменной, содержащих параметры	1		
Квадратные уравнения и неравенства (11 часов)				
14.	Решение квадратных уравнений с параметрами	1		
15.	Использование теоремы Виета при решении квадратных уравнений с параметрами	1		
16.	Решение уравнений с параметрами, приводимых к квадратным	1		
17.	Расположение корней квадратного уравнения в зависимости от параметра	1		
18.	Решение квадратных уравнений второго типа	1		
19.	Нахождение значений параметра, при каждом из которых уравнение удовлетворяет заданным условиям	1		
20.	Взаимное расположение корней двух квадратных уравнений	1		
21.	*Контрольная работа №2 по теме: «Квадратные уравнения с параметрами»*	1		
22.	Решение квадратных неравенств	1		
23.	Решение неравенств методом интервалов	1		
24.	Нахождение заданного количества решений уравнения или неравенства	1		

Аналитические и геометрические приемы решения задач с параметрами (9 часов)				
25.	Графический метод решения задач с параметрами	1		
26.	Использование графических иллюстраций в задачах с параметрами	1		
27.	Применение понятия «пучок прямых на плоскости»	1		
28.	Фазовая плоскость	1		
29.	Использование симметрии аналитических выражений	1		
30.	Решение относительно параметра	1		
31.	Область определения помогает решать задачи с параметром	1		
32.	Использование метода оценок и экстремальных свойств функции	1		
33.	Равносильность при решении задач с параметрами	1		
Решение различных видов уравнений и неравенств с параметрами (1 час)				
34.	Решение тригонометрических, показательных, логарифмических и иррациональных уравнений и неравенств	1		

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Введение. Понятие «уравнения с параметрами»

Цели: познакомить с понятиями *параметр, задача с параметром;* формировать осознанный подход к решению задач с параметром; развивать исследовательскую деятельность учащихся.

Уравнение с параметром – это, по сути дела, краткая запись бесконечного семейства уравнений. Каждое из уравнений семейства получается из данного уравнение с параметром при конкретном значении параметра. Поэтому задачу решения уравнения с параметром можно сформулировать следующим образом: *решить уравнение с параметром f(x; a) = 0 – это решить семейство уравнений, получающихся из уравнения f(x; a) = 0 при любых действительных значениях параметра.*

Ясно, что выписать каждое уравнение из бесконечного семейства уравнений невозможно, но тем не менее каждое уравнение из бесконечного семейства должно быть решено. Сделать это, например, можно, если по некоторому целесообразному признаку разбить множество всех значений параметра - множество действительных чисел или множество значений, заданное в условии задачи, - на подмножества, а затем заданное уравнение решить на каждом- из этих подмножеств.

Чтобы разбить множество значений параметра на подмножества, полезно воспользоваться теми значениями параметра, при которых или при переходе через которые происходит *качественное изменение* уравнения. Такие значения параметра можно назвать *контрольными* или *особыми.* Искусство решения уравнения с параметрами как раз и состоит в том, чтобы уметь находить контрольные значения параметра.

Каковы основные типы задач с параметрами?

Тип 1. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.

Этот тип задач является базовым при овладении темой «Задачи с параметрами», поскольку вложенный труд предопределяет успех и при решении задач всех других основных типов.

Тип 2. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности,

для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).

Обращаем внимание на то, что при решении задач данного типа нет необходимости ни решать заданные уравнения, неравенства, их системы и совокупности и т. д., ни приводить эти решения; такая лишняя в большинстве случаев работа является тактической ошибкой, приводящей к неоправданным затратам времени. Однако не стоит абсолютизировать сказанное, так как иногда прямое решение в соответствии с типом 1 является единственным разумным путем получения ответа при решении задачи типа 2.

Тип 3. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения, неравенства, их системы и совокупности имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений).

Легко увидеть, что задачи типа 3 в каком-то смысле обратны задачам типа 2.

Тип 4. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Например, найти значения параметра, при которых:

1) уравнение выполняется для любого значения переменной из заданного промежутка;

2) множество решений первого уравнения является подмножеством множества решений второго уравнения и т. д.

Многообразие задач с параметром охватывает весь курс школьной математики (и алгебры, и геометрии), но подавляющая часть из них на выпускных и вступительных экзаменах относится к одному из четырех перечисленных типов, которые по этой причине названы основными.
Наиболее массовый класс задач с параметром - задачи с одной неизвестной и одним параметром.

Каковы основные способы (методы) решения задач с параметром?

Способ I (аналитический). Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра. Иногда говорят, что это способ силового, в хорошем смысле «наглого» решения.

Аналитический способ решения задач с параметром есть самый трудный способ, требующий высокой грамотности и наибольших усилий по овладению им.

Способ II (графический). В зависимости от задачи (с переменной х и параметром а) рассматриваются графики или в координатной плоскости Оху, или в координатной плоскости Оха.

Способ III (решение относительно параметра). При решении этим способом переменные х и а принимаются равноправными и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым. После естественных упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных х и а и заканчиваем решение.

Линейные уравнения, их системы и неравенства с параметром

Цели: ввести алгоритм решения линейных уравнений с параметром; формировать умение решать линейные уравнения с параметром; развивать логическое мышление, умение работать в проблемной ситуации; активизировать познавательную и творческую деятельность; формировать навыки решения линейных уравнений с параметром; развивать умение сравнивать и обобщать закономерности; развивать навыки самостоятельной работы; использовать полученные ранее знания при решении линейных уравнений с дополнительными условиями; развивать умение сравнивать и обобщать закономерности; формировать навыки исследовательской работы.

Линейным уравнением называется уравнение вида $ax = b$, где a, b – некоторые действительные числа, x – переменная.

В зависимости от коэффициента a, зависит и решение этого уравнения.

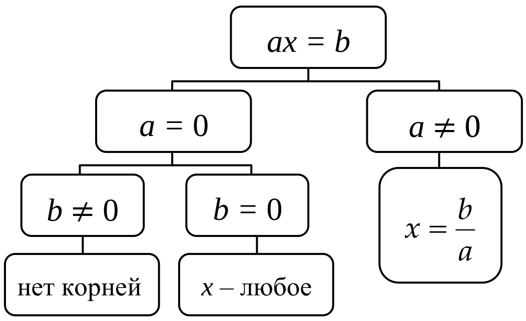
При $a = 0$, $b \neq 0$ уравнение не имеет корней, так как нет такого числа, которое при умножении на нуль, даст результат, отличный от нуля.

При $a = 0$, $b = 0$ уравнение имеет бесконечно много решений, решением является любое действительное число.

При $a \neq 0$ мы можем обе части уравнения разделить на a, имеем единственный корень, равный $x = \frac{b}{a}$.

Итак, получили следующую схему.

Схема 1. Решение линейных уравнений



Итак, на прошлом уроке мы говорили, что можно по некоторому целесообразному признаку разбить множество всех значений параметра на подмножества, а затем заданное уравнение решить на каждом из этих подмножеств. Чтобы разбить множество значений параметра на подмножества, полезно воспользоваться *контрольными* или *особыми* значениями параметра, при которых или при переходе через которые происходит *качественное изменение* уравнения.

При решении линейных уравнений с параметрами качественное изменение происходит при переходе коэффициента a через нуль. То есть контрольным(и) значением(ями) будут те значения коэффициента при переменной x, при которых он обращается в нуль, так как при таких значениях невозможно деление на коэффициент при x (а при иных значениях параметра такое деление возможно); следовательно, меняется процедура решения уравнения, в этом и состоит *качественное изменение* уравнения.

Решение систем линейных уравнений (с двумя переменными) с параметрами

Цели: формировать умение решать системы линейных уравнений с параметром; осуществить оперативный контроль учащихся; развивать умение сравнивать и обобщать закономерности; формировать умение работать в группе.

Определение. *Системой линейных уравнений с двумя переменными* называется два линейных уравнения, рассматриваемых совместно:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Решениями системы линейных уравнений называются такие пары чисел $(x_o; y_o)$, которые являются решениями одновременно и первого, и второго уравнения системы.

Если система уравнений имеет решения, то говорят, что она *совместна.* Если же система уравнений не имеет решений, то говорят, что она *несовместна.*

Совместную систему уравнений называют *определенной (однозначной),* если она имеет единственное решение.

Совместную систему уравнений называют *неопределенной,* если она имеет более одного решения. Две совместные системы называются *эквивалентными,* если множества их решений совпадают.

Пусть числа a_2, b_2, c_2 отличны от нуля.

Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное решение, то есть *определенная.*

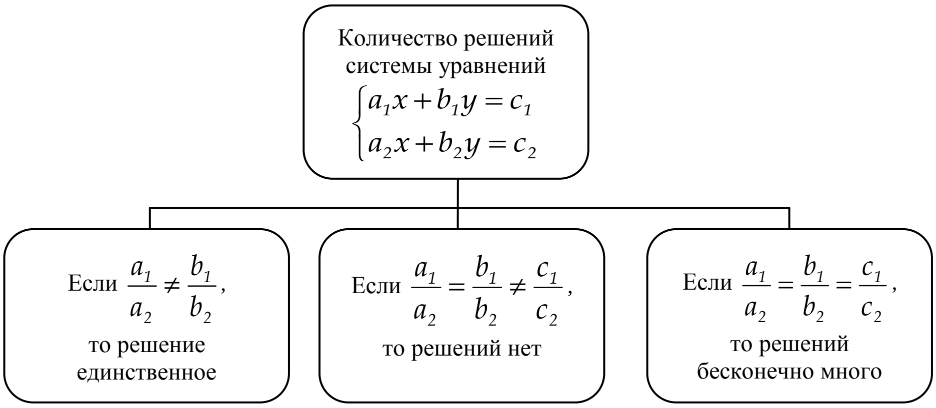
Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений, то есть *несовместна.*

Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечно много решений, то есть *неопределенная.*

Если c_1, c_2 равны нулю, то система называется *однородной* и всегда имеет решение (0; 0). Если однородная система имеет ненулевое решение $(x_o; y_o)$, значит, она имеет бесконечное множество решений $(kx_o; ky_o)$.

Необязательно вводить новые понятия, достаточно повторить определения системы линейных уравнений, решения системы уравнений и дать схему 2.

Схема 2. Зависимость количества решений системы линейных уравнений от коэффициентов системы



Решение линейных неравенств с параметрами

Цели: ввести алгоритм решения линейных неравенств с параметром; формировать умение решать линейные неравенства с параметром; развивать умение сравнивать и обобщать закономерности; формировать умение анализировать и проводить аналогию; развивать логическое мышление, умение работать в проблемной ситуации; активизировать познавательную и творческую деятельность.

Определение. Неравенство, обе части которого являются линейными функциями относительно переменной, называется *линейным.*

В общем виде линейное неравенство записывается так: $kx + l > mx + n$.

Определение. Два неравенства с одной переменной называются *равносильными,* если их решения совпадают.

При решении неравенств опираемся на следующие теоремы о равносильных преобразованиях:

– Если какой-либо член неравенства перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, *равносильное* данному.
– Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, оставив при этом знак неравенства без изменения, по получится неравенство, *равносильное* данному.
– Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, *равносильное* данному.

Обычно эти теоремы о равносильности используют в виде правил, формулировка которых более проста и понятна:

• Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком (не меняя при этом знака неравенства).

• Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же *положительное* число, *не меняя* при этом знака неравенства.

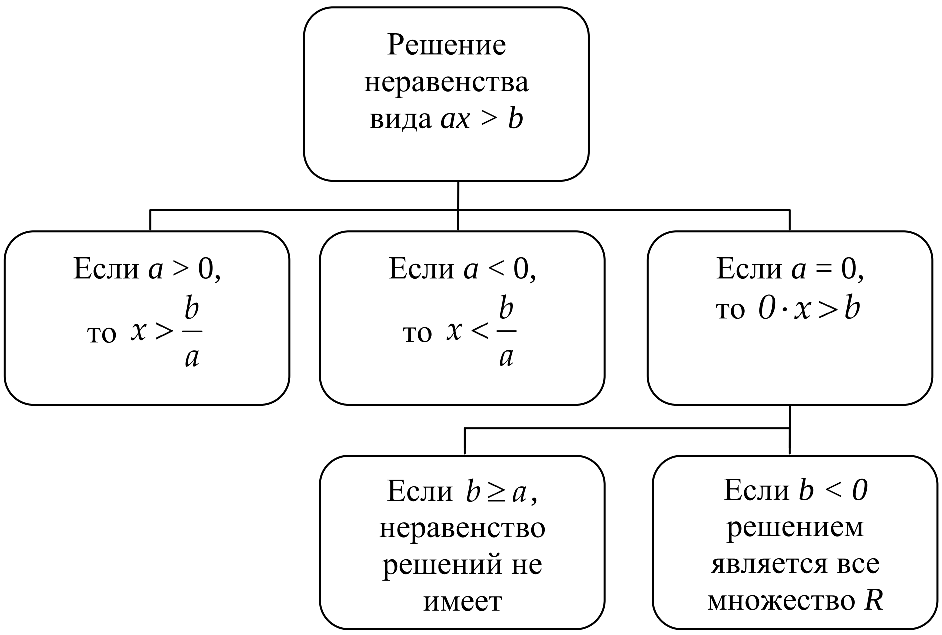
• Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный.

Выполнив равносильные преобразования неравенства $k\,x + l > mx + n$, получаем:

$(k - m)x > n - 1$. Обозначив $k - m = a$ и $n - 1 = b$, имеем $ax > b$.

Как и в линейном уравнении, опять контрольными будут те значения параметра, при которых коэффициент при x обращается в 0. Но для оценки качественного изменения неравенства следует учесть, что процедура решения неравенства зависит от знака коэффициента при x. Если этот коэффициент положителен, то мы используем одну теорему о равносильности неравенств, постулирующую сохранение знака неравенства; если этот коэффициент отрицателен, то мы используем другую теорему, постулирующую изменение знака неравенства. Поэтому, осуществляя разбивку множества всех значений параметра (множества действительных чисел) на подмножества, мы будем рассматривать случаи $a = 0$, $a > 0$, $a < 0$.

Схема 3. Решение неравенства *ax* > *b*



Итак, мы рассматриваем три случая: $a = 0$, $a > 0$, $a < 0$.

Решение квадратных уравнений с параметрами

Цели: формировать умение решать квадратные уравнения с параметром; развивать логическое мышление, умение работать в проблемной ситуации; активизировать познавательную и творческую деятельность; формировать умение решать квадратные уравнения с параметром с помощью теоремы Виета.

Определение. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, где коэффициенты a, b, c – любые действительные числа, называется *квадратным.*

Определение. Квадратное уравнение называется *приведенным,* если $a = 1$; квадратное уравнение называют *неприведенным,* если $a \neq 1$.

Определение. *Полное квадратное уравнение* – это квадратное уравнение, в котором a, b, c отличны от нуля.

Определение. *Неполное квадратное уравнение* – это уравнение, в котором один или оба коэффициента b, c равны нулю.

Определение. Корнем квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, называют всякое значение переменной x, при котором квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ обращается в нуль.

Выражение $b^2 – 4ac$ называют дискриминантом квадратного уравнения.

Квадратное уравнение в зависимости от знака дискриминанта D может иметь один, два или не иметь корней.

Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет единственный действительный корень $x = \frac{-b}{2a}$ (или говорят, что это уравнение имеет два кратных корня $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$).

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два различных действительных корня $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Теорема Виета. Если x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $ax + bx + c = 0$, $a \neq 0$, то сумма корней равна $\frac{-b}{a}$, а их произведение равно $\frac{c}{a}$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Обратное утверждение. Если числа x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, то эти числа – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$.

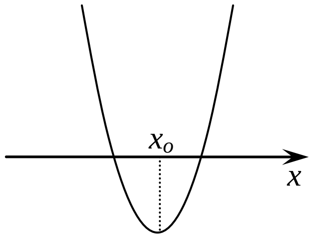
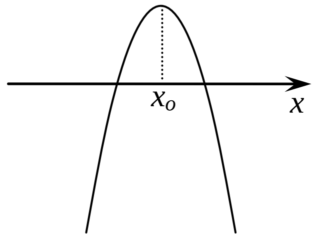
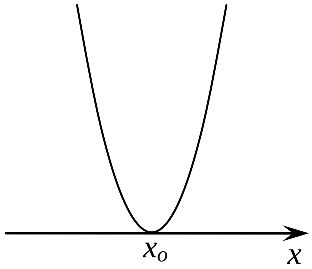
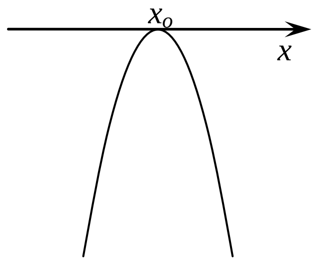
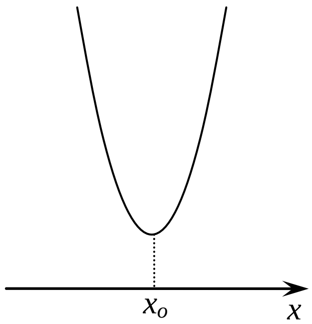
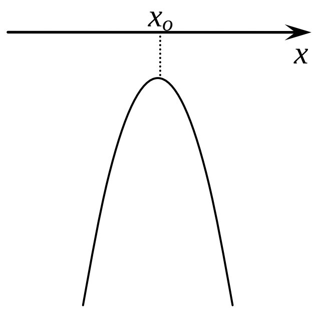
При решении квадратного уравнения с параметрами контрольными будут те значения параметра, при которых коэффициент при x^2 обращается в 0. Дело в том, что если этот коэффициент равен нулю, то уравнение превращается в линейное и решается по соответствующему алгоритму; если же этот коэффициент отличен от нуля, то имеем квадратное уравнение, которое решается по иному алгоритму (меняется процедура решения, в этом и состоит *качественное изменение уравнения).* Дальнейшее решение зависит от D.

Расположение корней квадратного трехчлена в зависимости от параметра

Цель: формировать умение распознавать положение параболы на плоскости в зависимости от ее коэффициентов.

При этом удобно пользоваться таблицей на схеме 4.

Схема 4. Расположение параболы по отношению к оси абсцисс в зависимости от ее коэффициентов и дискриминанта

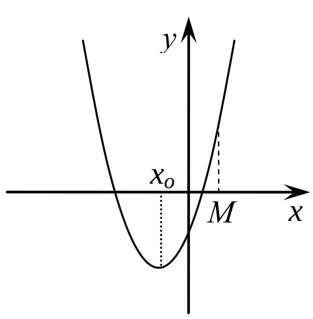
	a > 0	**a < 0**
D > 0		
D = 0		
D < 0		

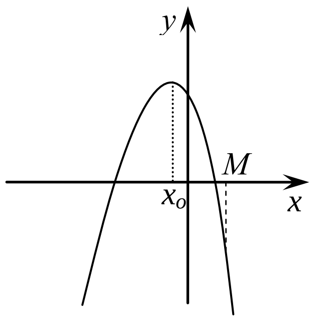
При решении многих задач требуется знание следующих теорем и следствий.

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни x_1, x_2 (которые могут быть кратными), а M, N – какие-нибудь действительные числа, причем $M < N$. Тогда:

Теорема 1. Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были меньше, чем число M (то есть лежали на числовой оси левее, чем точка M), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ x_o = -\dfrac{b}{2a} < M, \\ f(M) > 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ D \geq 0, \\ x_o = -\dfrac{b}{2a} < M, \\ f(M) < 0. \end{cases}$$

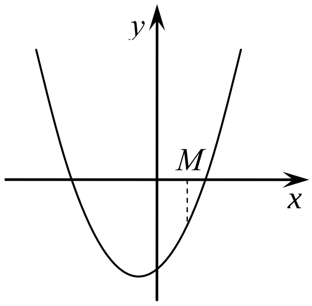


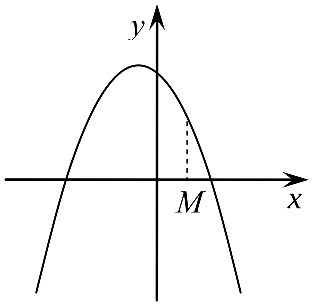


Теорема 2. Для того чтобы один из корней квадратного трехчлена был меньше, чем число *M,* а другой больше, чем *M* (то есть точка *M* лежала бы между корнями), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(M) < 0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a < 0, \\ f(M) > 0. \end{cases}$$

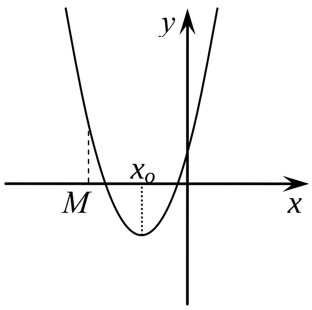
Эти две системы можно заменить формулой $a \cdot f(M) < 0$.

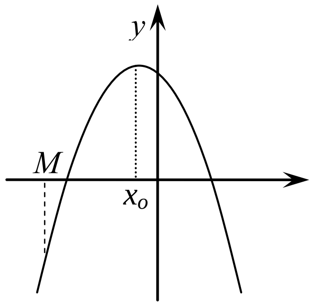




Теорема 3. Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше, чем число *M* (то есть лежали на числовой оси правее, чем точка *M*), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

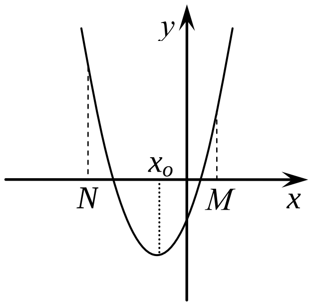
$$\begin{cases} a > 0, \\ D \ge 0, \\ x_o = -\dfrac{b}{2a} > M, \\ f(M) > 0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a < 0, \\ D \ge 0, \\ x_o = -\dfrac{b}{2a} > M, \\ f(M) < 0. \end{cases}$$

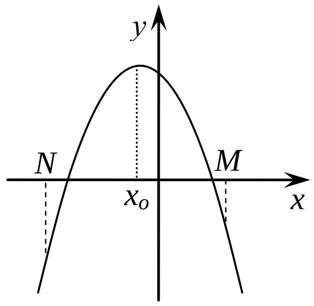




Следствие 1. Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были меньше, чем число *M*, но меньше, чем число *N* (то есть лежали в интервале между *M* и *N*, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

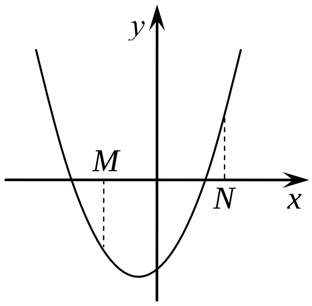
$$\begin{cases} a > 0, \\ D \ge 0, \\ N < x_o = -\dfrac{b}{2a} < M, \\ f(M) > 0, \\ f(N) > 0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a < 0, \\ D \ge 0, \\ N < x_o = -\dfrac{b}{2a} < M, \\ f(M) < 0, \\ f(N) < 0. \end{cases}$$

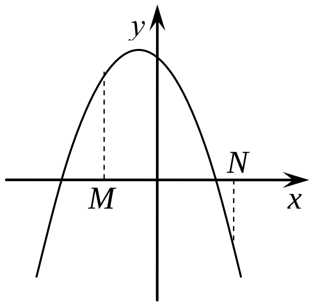




Следствие 2. Для того чтобы больший корень квадратного трехчлена лежал в интервале между *M* и *N*, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

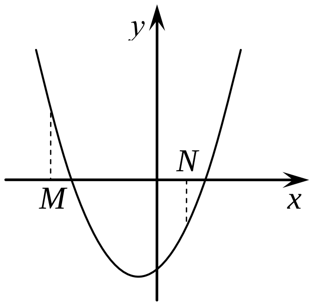
$$\begin{cases} a>0, \\ f(M)<0, \\ f(N)>0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a<0, \\ f(M)>0, \\ f(N)<0. \end{cases}$$

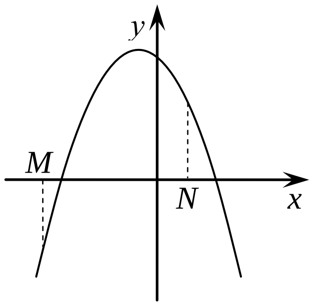




Следствие 2. Для того чтобы только меньший корень квадратного трехчлена лежал в интервале между *M* и *N*, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

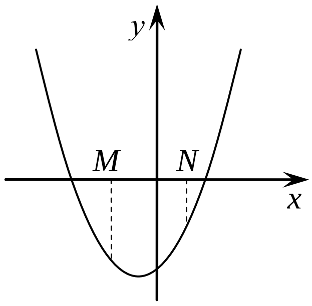
$$\begin{cases} a>0, \\ f(M)>0, \\ f(N)<0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a<0, \\ f(M)<0, \\ f(N)>0. \end{cases}$$

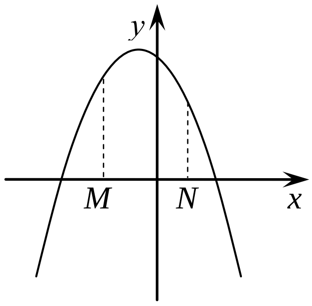




Следствие 4. Для того чтобы один из корней квадратного трехчлена был меньше, чем число *M*, но меньше, а другой больше, чем число *N* (то есть отрезок *MN* лежал внутри интервала между корнями), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} a>0, \\ f(M)<0, \\ f(N)<0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a<0, \\ f(M)>0, \\ f(N)>0. \end{cases}$$





Акцентировать внимание учащихся на том, что здесь контрольными являются: направление ветвей параболы, знаки значений *f(M)*, *f(N)*, расположение вершины параболы (а все остальное записывается по графической иллюстрации).

Решение неравенств методом интервалов

Цель: формировать умения решать неравенства методом интервалов; развивать логическое мышление, умение работать в проблемной ситуации; активизировать познавательную и творческую деятельность; умение работать в паре и группе.

Алгоритм решения неравенств методом интервалов

$$\boxed{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)>0}$$

1. Рассмотрим функцию $y=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$.

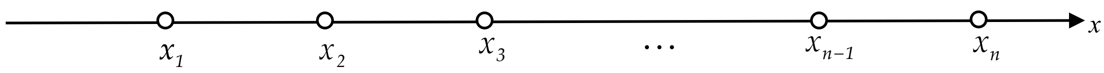
2. Найдем нули этой функции, решив уравнение:

   $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)=0$

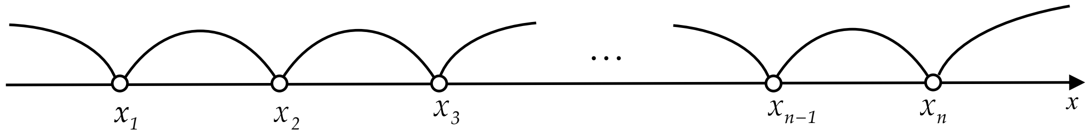
   $x=x_1;\quad x=x_2;\quad x=x_3;\quad \ldots\quad ;\quad x=x_n.$

3. Отметим полученные значения на числовой оси:

   а)



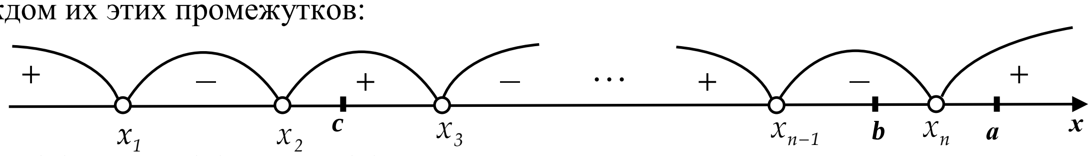
   б) Получили промежутки:



   $(-\infty; x_1)$ $(x_1; x_2)$ $(x_2; x_3)$ … $(x_{n-1}; x_n)$ $(x_n; +\infty)$,

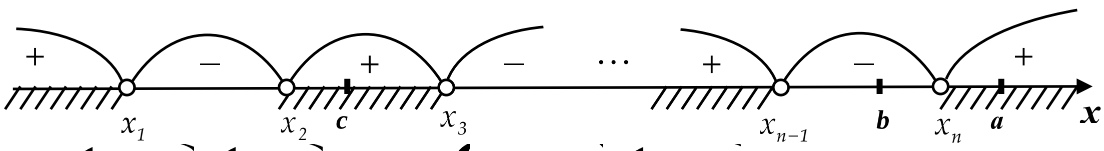
   где $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_{n-1}<x_n$.

4. Определяем знаки, которые принимает функция $y=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$ на каждом их этих промежутков:



   $y(a)>0;\quad y(b)<0;\quad y(c)>0;\ldots$

5. Выделяем те промежутки, которые удовлетворяют искомому неравенству:



   $x\in(-\infty; x_1)\cup(x_2; x_3)\cup\ \ldots\ \cup(x_{n-2}; x_{n-1})\cup(x_n; +\infty)$

6. Записываем ответ: $(-\infty; x_1)\cup(x_2; x_3)\cup\ \ldots\ \cup(x_{n-2}; x_{n-1})\cup(x_n; +\infty)$.

Нахождение заданного количества решений уравнения или неравенства

Цель: познакомить учащихся с новым типом задач; формировать умение решать задачи графическим способом.

Характерными для задач с параметрами являются уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).

При решении задач данного типа нет необходимости ни решать заданные уравнения, неравенства, их системы и совокупности и т. д., ни приводить эти решения; такая лишняя в большинстве случаев работа является тактической ошибкой, приводящей к неоправданным затратам времени. Но иногда прямое решение является единственным разумным путем получения ответа при решении задач такого типа.

В основном, до этого момента разбирались задачи **первого типа**, то есть задачи, которые необходимо решить для всех значений параметра. Но частично встречались нам и задачи второго типа.

Тип 2. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).

Тип 3. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения, неравенства, их системы и совокупности имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений).

Эти типы задач отличает то, что при их решении не требуется получить явное решение, а нужно лишь найти те значения параметра, при которых это решение удовлетворяет тем или иным условиям. Примерами таких условий для решения могут служить следующие:

- существует решение;
- не существует решения;
- существует единственное решение;
- существует положительное решение;
- существует ровно k решений;
- существует решение, принадлежащее указанному промежутку.

В этих случаях оказывается очень полезен графический способ решения задач с параметрами.

При этом можно выделить две разновидности применения метода при решении уравнения $f(x) = f(a)$:

На плоскости Oxy рассматриваются график $y = f(x)$ и семейство графиков $y = f(a)$. Сюда же относятся задачи, решаемые с помощью «пучка прямых». Этот способ оказывается удобен в задачах с двумя неизвестными и одним параметром.

На плоскости Oxa (которую называют также фазовой) рассматриваются графики, в которых x – аргумент, а a – значение функции. Этот способ обычно применяется в задачах, в которых фигурируют лишь одна неизвестная и один параметр (или сводящиеся к таким).

На этом уроке мы разберем задачи, решаемые графическим способом, строя графики на плоскости Oxy.

Применение понятия «пучок прямых на плоскости»

Фазовая плоскость

Цель: введение понятия «пучок прямых»; понятие «фазовая плоскость», формировать умение решать задачи этой плоскости.

На плоскости Oxy функция $y = f(x; a)$ задает семейство кривых, зависящих от параметра a. Каждое семейство обладает определенными свойствами. Выбор семейства кривых в методе пучка прямых одновариантный. Это прямые, принадлежащие одному пучку $y - y_o = a(x - x_o)$ с центром в точке $A(x_o; y_o)$, где a – искомый параметр. Раскроем понятие пучка.

Множество прямых, проходящих через точку $A(x_o; y_o)$, называют пучком прямых, где A служит центром пучка. Каждую прямую пучка, кроме той, которая параллельна оси ординат, можно задать уравнением $y - y_o = k(x - x_o)$, где k – угловой коэффициент рассматриваемой прямой. Уравнение $y - y_o = k(x - x_o)$ есть уравнение пучка прямых, k – параметр пучка, характеризующий направление прямой. Значение параметра k можно найти, если указано условие, которое определяет положение прямой на плоскости.

Алгоритм решения уравнений с использованием фазовой плоскости

1. Находим область определения уравнения.
2. Выражаем параметр a как функцию от x.
3. В системе координат xOa строим график функции $a = f(x)$ для тех значений x, которые входят в область определения данного уравнения.
4. Находим точки пересечения прямой $a = c$, где $c \in (-\infty; +\infty)$ с графиком функции $a = f(x)$. Если прямая $a = c$ пересекает график $a = f(x)$, то определяем абсциссы точек пересечения. Для этого достаточно решить уравнение $a = f(x)$ относительно x.
5. Записываем ответ.

Использование симметрии аналитических выражений

Цели: ввести понятие симметрии аналитических выражений и показать применение симметрии при решении уравнений с параметром.

В ряде случаев при решении задач с параметрами необходимо обратить внимание на внешний вид условия задачи. Различного рода симметрии (симметрии области значений, области определения; симметрия относительно переменных) могут значительно упростить поиск искомых значений параметра.

Простейшим примером может служить зависимость $y = f(x)$, где $f(x)$ – четная функция; решением такого уравнения вместе с парой чисел $(x_o; y_o)$является пара $(-x_o; y_o)$.

Решение относительно параметра

Цель: формировать умение решать уравнения и неравенства относительно параметра.

Некоторые уравнения и неравенства бывает целесообразно решать, рассматривая их относительно параметра, а не относительно переменной. Его удобно применять, когда переменные находятся в степени выше второй, а параметр – в степени, не выше второй.

Область определения помогает решать задачи с параметром

Цель: ввести новый способ решения уравнений с использованием области определения уравнения; актуализация опорных знаний. Дать понятие области определения выражения.

Каждое уравнение, неравенство, система и т. д. имеют свою область определения, а анализ условий, ее определяющих, как правило, является необходимой (а часто и значительно упрощающей) частью решения задачи.

В задачах с неизвестным x и параметром а под областью определения понимают множество всех упорядоченных пар чисел *(x; a)*, каждая из которых такова, что после подстановки соответствующих значений x и a во все входящие в задачу соотношения они будут определены. Поэтому область определения задачи с одним параметром – это некоторое множество из координатной плоскости *Oxa*.

Равносильность при решении задач с параметрами

Цель: формировать умение решать задачи с использованием равносильных переходов.

Многие задачи с параметрами решаются простым аккуратным применением равносильных переходов.

Уравнения называются равносильными, если совпадают множества их решений (или они оба не имеют решений).

Решение уравнений, встречающихся в школьном курсе алгебры, основано на следующих шести равносильных преобразованиях:

1. Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.
2. Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.
3. Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.
4. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, имеющее смысл в области определения уравнения $f(x) = g(x)$ и не равное в нем нулю, то получится уравнение $f(x)\, h(x) = g(x)\, h(x)$, равносильное данному.
5. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих частей в одну и ту же четную степень $f^{\,n}(x) = g^{\,n}(x)$ получится уравнение, равносильное данному.
6. Если $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Вспомним некоторые равносильные переходы при решении уравнений:

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ \left[\begin{array}{l} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0. \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ \left[\begin{array}{l} g(x) > 0, \\ f(x) > 0. \end{array}\right. \end{cases}$$

При решении неравенств с параметрами необходимо следить, чтобы в ходе преобразований не терялись решения и не появлялись посторонние решения.

Вспомним некоторые определения и теоремы.

Частным решением неравенства $f(x) > g(x)$ называют всякое значение переменной x, которое обращает заданное неравенство с переменной в верное числовое неравенство.

Множество всех частных решений неравенства $f(x) > g(x)$ называют общим решением, но чаще употребляют термин решение.

Два неравенства с одной переменной $f(x) > g(x)$ и $p(x) > h(x)$ называют равносильными, если их решения (то есть множества частных решений) совпадают.

Если решение неравенства $f(x) > g(x)$ содержится в решении неравенства $p(x) > h(x)$, то неравенство $p(x) > h(x)$ называют следствием неравенства $f(x) > g(x)$. (Этот термин использовался ранее).

Решение неравенств из школьной программы основано на шести равносильных преобразованиях неравенств:

1. Если какой-либо член неравенства перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.
2. Если обе части неравенства возвести в одну и ту же нечетную степень, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.
3. Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно: а) неравенству $f(x) > g(x)$ того же смысла, если $a > 1$; б) неравенству $f(x) < g(x)$ противоположного смысла, если $0 < a < 1$.
4. а) Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, положительное при всех из области определения неравенства, оставив при этом знак неравенства без изменения, то получится неравенство $f(x)\ h(x) > g(x)\ h(x)$, равносильное данному.

   б) Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, отрицательное при всех из области определения неравенства, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство $f(x)\ h(x) < g(x)\ h(x)$, равносильное данному.
5. Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ неотрицательны в области определения, то после возведения обеих частей неравенства в одну и ту же четную степень n получится неравенство того же смысла: $f^{\,n}(x) > g^{\,n}(x)$, равносильное данному.
6. Если $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, то логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно: а) неравенству $f(x) > g(x)$ того же смысла, если $a > 1$; б) неравенству $f(x) < g(x)$ противоположного смысла, если $0 < a < 1$.

Некоторые равносильные переходы:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^2(x), \\ g(x) > 0, \\ f(x) \ge 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g^2(x), \\ g(x) \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \ge 0. \end{cases}$$